**АНАЛИЗ НА РЕШЕНИЕТО НА ЗАДАЧА**

**РЕДИЦИ**

Задачата може да се формулира и по следния начин: Да се намери най-голямото цяло число , за което системата  няма решение в цели числа (да припомним, че  са дадени цели положителни числа (при това  и  са взаимно прости), а неизвестните са ). Ще покажем, че при  такова най-голямо  винаги съществува. Вярна е следната

**Теорема:** Ако  са две взаимно прости цели числа, то най-голямото цяло число , за което системата  няма решение е 

Преди да докажем това твърдение, да разгледаме две конкретни числа. Нека  и . Ще запишем естествените числа в таблица, съдържаща 4 колони и безброй много редове, като попълваме числата последователно по редове, започвайки от 1.



Всички числа, записани в последната колона са кратни на 4. Следователно, ако  e равно на някое от тях, системата ще има решение. След това започваме да отбелязваме в таблицата числата, кратни на 7 до момента, в който във всяка от първите три колони имаме отбелязано число. Така системата ще има решение за всяко от числата, които са оцветени в червено, а няма да има решение за оцветените в черно числа (помислете защо). Така търсеното най-голямо число, за което системата няма решение, е това което е над 21, т.е. 17. Тъй като числата 4 и 7 са взаимно прости, то лесно може да пресметнем кое ще е последното оградено число (3.7), а това, което е над него ще бъде .

Сега да разгледаме общия случай, когато  и  са взаимно прости цели числа, за които . Съставяме по аналогичен начин таблица, която има  стълба и записваме в нея естествените числа. След това отбелязваме в таблицата последователно числата, кратни на  докато във всяка от първите  колони получим поне по едно отбелязано число. Числата  образуват пълна система остатъци по модул , защото  и  са взаимно прости (казано с други думи всеки две от тези числа попадат в различни колони от таблицата), което означава, че последното оградено число е , а числото над него е  с което теоремата е доказана.

Така имаме формула, която може да се приложи за решаване на подзадача 2.

Тук ще отбележим, че тази формула може да служи като горна граница за отговора, когато  Тъй като за всички числа , които са по-големи от  системата  има решение, то за тях ще има решение и системата . Наистина, ако наредената двойка числа  е решение на първата система, то наредената -торка числа  е решение на втората система. Следователно при  отговорът на задачата е най-много .

При ограниченията на първата подзадача, това означава, че той със сигурност няма да надвишава 1000000. Това позволява в този случай задачата да се решава динамично. Нека , когато системата няма решение при  и , когато системата има решение при . Ясно е, че , точно тогава когато  или  или … или . Пресмятанията на стойностите на  извършваме докато намерим  на брой последователни стойности на , за които . Тогава търсеният отговор на задачата ще е последната намерена стойност на , за която .

Този алгоритъм обаче няма да може да се използва за решаване на последната подзадача, тъй като тогава стойността на  е много голяма. В този случай може да използваме отново идеята от доказателството на теоремата. Отново съставяме таблицата и започваме да отбелязваме в нея числа до момента, в който във всяка от първите  колони се появи по едно оградено число. Числото над последното оградено е търсения отговор. Кои числа обаче трябва да отбелязваме? Това са всички числа, които могат да се образуват по формулата , където  са неотрицателни цели числа, такива че . При зададените ограничения в условието на третата подзадача лесно се вижда, че техният брой не надминава 1000000. Генерираме тези числа, подреждаме ги по големина и започваме последователното им отбелязване в таблицата.

*Автор: Младен Манев*